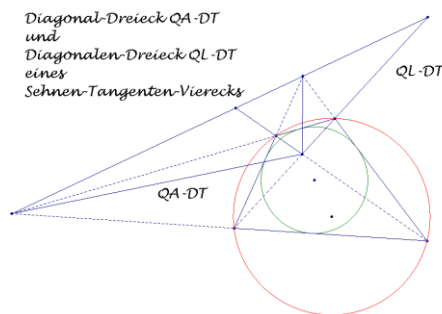


EQF-Punkte für Sehnen-Tangenten-Vierecke

Eckart Schmidt

Ein Sehnen-Tangenten-Viereck hat einen Umkreis, auf dem die Ecken liegen, und einen Inkreis, den die Seitengeraden berühren. Dabei ist der Umkreis der Polarkreis (polar circle) des Diagonal-Dreiecks und der Inkreis der Polarkreis des Diagonalen-Dreiecks. Aus der Sicht dieser beiden Dreiecke wird hier die Geometrie der Sehnen-Tangenten-Vierecke untersucht. Zugrunde gelegt wird die „Encyclopedia of Quadri Figures“ (EQF) von Chris van Tienhoven [1]. Eine analytische Behandlung in baryzentrischen Koordinaten wird nur angedeutet.



Vorbemerkungen

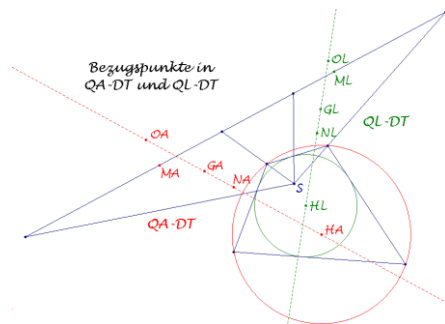
Ein Viereck im engeren Sinne wird bei Chris van Tienhoven [1] als Quadrigon (QG) angesprochen, bestehend aus vier Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 und vier Geraden $L_1=P_1P_2, L_2=P_2P_3, L_3=P_3P_4, L_4=P_4P_1$. Daneben werden die Bezeichnungen Quadrangle (QA) für vier Punkte (ungeordnet) und Quadrilateral (QL) für vier Geraden (ungeordnet) benutzt. Jedes Quadrigon kann als Quadrangle und als Quadrilateral betrachtet werden. Ein Sehnen-Tangenten-Viereck muss also als Quadrigon angesprochen werden. Es ist durch sein Diagonal-Dreieck $QA-DT$ bzw. durch sein Diagonalen-Dreieck $QL-DT$ eindeutig festgelegt. Beide Dreiecke haben eine gemeinsame Ecke – im Folgenden als Scheitel S angesprochen – und eine gemeinsame Gegenseitengerade – im Folgenden als Basisgerade bezeichnet. Der Scheitel sei die Ecke B , wenn eines der beiden Dreiecke als Bezugsdreieck ABC für baryzentrische Koordinaten gewählt wird. Der Winkel an dieser Ecke muss stumpfwinklig sein, damit ein Polarkreis existiert.

Vor dem Hintergrund, die Geometrie der Sehnen-Tangenten-Vierecke aus der Sicht der Dreiecke $QA-DT$ und $QL-DT$ zu beschreiben, seien gängige Punkte dieser beiden Bezugsdreiecke in ihrer EQF -Bezeichnung abgekürzt:

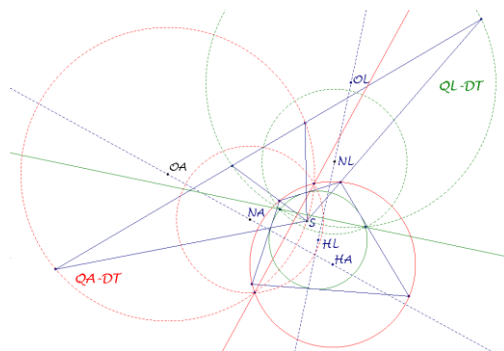
	$QA-DT$	$QL-DT$
Schwerpunkt	$G_A=QA-P10$	$G_L=QL-P8$
Umkreismitte	$O_A=QA-P11$	$O_L=QL-P9$
Höhenschnitt	$H_A=QA-P12$	$H_L=QL-P10$
Neun-Punkte-Zentrum	$N_A=QA-P13$	$N_L=QL-P11$

Aus dem QG -Bereich seien verkürzt zitiert:

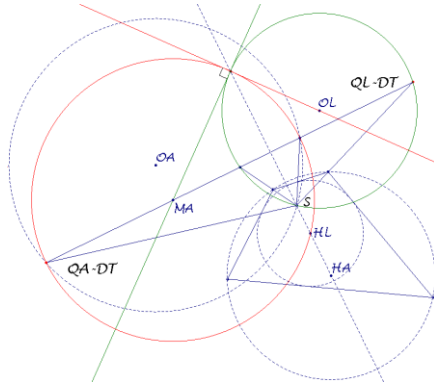
S	Scheitel $QG-P1$
M_A	QA -Basismitte $QG-P2$
M_L	QL -Basismitte $QG-P3$



Der Mittelpunkt des Polarkreises eines stumpfwinkligen Dreiecks ist der Höhenschnitt; der Polarkreis hat mit Umkreis und Neun-Punkte-Kreis des Dreiecks die gleiche Radikalachse. Dies gilt sowohl im QA - als auch im QL -Bereich. Der $QA-DT$ -Polarkreis ist der Umkreis und der $QL-DT$ -Polarkreis ist der Inkreis des Sehnen-Tangenten-Vierecks.



$QA-DT$ und $QL-DT$ bestimmen sich gegenseitig: Hintergrund ist, dass der $QA-DT$ -Basis-Thales-Kreis die gemeinsame Höhe auf der scheidelabgewandten Seite in einem Punkt des $QL-DT$ -Umkreises senkrecht schneidet.



Ist $QA-DT$ das Bezugsdreieck, so erhält man die Ecken des Sehn-Tangenten-Vierecks

$$P_1(-p:q:r), \quad P_2(p:-q:r), \quad P_3(p:q:-r), \quad P_4(p:q:r)$$

für

$$p = \sqrt{S_C^2 + S\sqrt{S_A S_C}}, \quad q = \frac{b^2 \sqrt{\sqrt{S_A S_C}}}{\sqrt{\sqrt{S_A S_C} - S}}, \quad r = \sqrt{S_A^2 + S\sqrt{S_A S_C}}$$

Die QL -Basis-Punkte teilen dann die QA -Basis harmonisch im Verhältnis

$$\pm \sqrt{\frac{S_A^2 + S\sqrt{S_A S_C}}{S_C^2 + S\sqrt{S_A S_C}}}$$

Ist $QL-DT$ das Bezugsdreieck, so erhält man die Seitengeraden des Sehn-Tangenten-Vierecks

$$L_1(-l:m:n), \quad L_2(l:-m:n), \quad L_3(l:m:-n), \quad L_4(l:m:n)$$

für

$$l = a S_A, \quad m = \sqrt{-S_B(S_A S_C + S^2)}, \quad n = c S_C.$$

Die QA -Basis-Punkte teilen dann die QL -Basis harmonisch im Verhältnis

$$\pm \frac{aS_A}{cS_C}.$$

Benutzt werden die Conway-Abkürzungen S_A, S_B, S_C, S mit

$$2S_A = -a^2 + b^2 + c^2, \quad 2S_B = a^2 - b^2 + c^2, \quad 2S_C = a^2 + b^2 - c^2,$$

$$S^2 = S_A S_B + S_B S_C + S_C S_A = 4\Delta^2.$$

Durch die Berechnungsgrundlagen des EQF -Katalogs ist damit ein analytischer Zugang zu den EQF -Punkten eines Sehn-Tangenten-Vierecks möglich, worauf hier verzichtet wird.

QA-Punkte

Es werden die Punkte $QA-P1$ bis $QA-P37$ berücksichtigt. Keine Angaben werden zu $QA-P17$, $QA-P18$, $QA-P27$ gemacht. Ergänzend sind die Eigenschaften des EQF -Katalogs zu beachten.

QA-P1 QA-Centroid

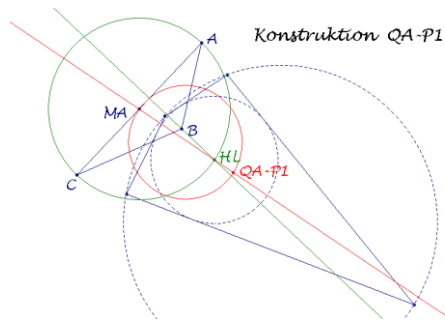
Dieser Punkt wird als weiterer Bezugspunkt herangezogen, da er von zentraler Bedeutung für die Geometrie der Sehnen-Tangenten-Vierecke ist.

QA-P1 eines Sehnen-Tangenten-Vierecks ist wie folgt konstruktiv durch QA-DT bestimmt:

Das QA-DT sei ABC und bei B stumpfwinklig. Der Thales-Kreis über AC schneidet die Höhe auf der Seite von B in H_L .

QA-P1 ist der zweite Schnitt von $M_A H_L$ mit dem QA-DT-Neun-Punkte-Kreis QA-Ci2.

$$QA-P1 = QA-P6 = QA-P36$$



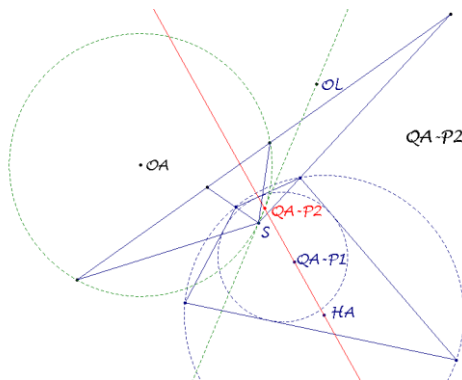
QA-P2 Euler-Poncelet Point

Auch dieser Punkt wird als weiterer Bezugspunkt herangezogen.

QA-P2 ist die Spiegelung von H_A an QA-P1

oder zweiter Schnitt von SO_L und QA-DT-Umkreis.

$$QA-P2 = QA-P14 = QA-P15 = QA-P37 = QL-P2 = QG-P10$$



QA-P3 Gergonne-Steiner Point

QA-P3 ist der Mittelpunkt H_A des QA-DT-Polarkreises.

$$QA-P3 = QA-P4 = QA-P8 = QA-P12 = QA-P32 = QG-P5$$

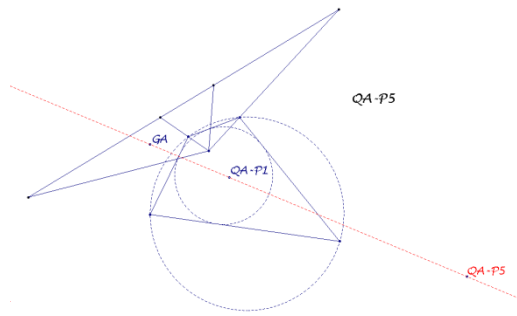
QA-P4 Isogonal Center

QA-P4 ist der Mittelpunkt H_A des QA-DT-Polarkreises.

$$QA-P3 = QA-P4 = QA-P8 = QA-P12 = QA-P32 = QG-P5$$

QA-P5 Isotomic Center

QA-P5 teilt allgemein $G_A, QA-P1$ im Verhältnis -4:3



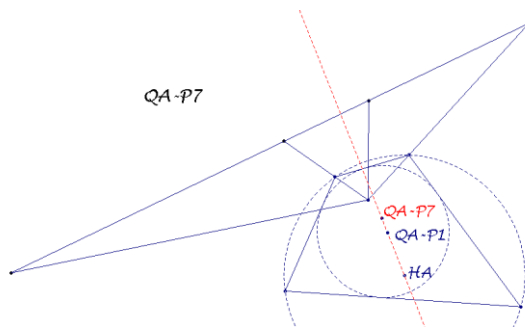
QA-P6 Parabola Axes Crosspoint

Zweiter Schnitt von $M_A H_L$
mit dem $QA-DT$ -Neun-Punkte-Kreis.

$$QA-P1 = QA-P6 = QA-P36$$

QA-P7 QA-Nine-Point Homothetic Center

$QA-P7$ teilt $H_A \cdot QA-P1$ im Verhältnis -4:1.



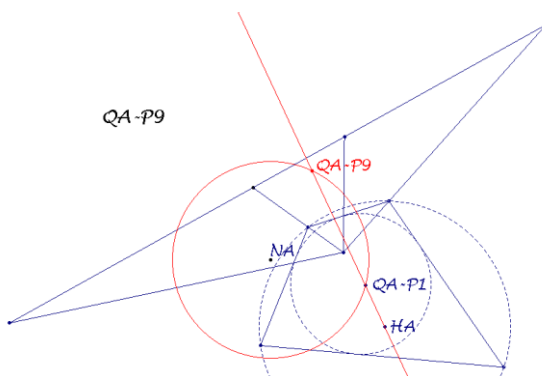
QA-P8 Midray Homothetik Center

$QA-P8$ ist der Mittelpunkt H_A des $QA-DT$ -Polarkreises.

$$QA-P3 = QA-P4 = QA-P8 = QA-P12 = QA-P32 = QG-P5$$

QA-P9 QA-Miquel Center

Zweiter Schnitt von $H_A \cdot QA-P1$
und dem $QA-DT$ -Neun-Punkte-Kreis .



QA-P10 Centroid of QA-DT

$$QA-P10 = G_A$$

QA-P11 Circumcenter of QA-DT

$$QA-P11 = O_A$$

QA-P12 Orthocenter of QA-DT

QA-P12 ist der Mittelpunkt H_A des QA-DT-Polarkreises.
QA-P3 = QA-P4 = QA-P8 = QA-P12 = QA-P32 = QG-P5

QA-P13 Nine-Point Center of QA-DT

QA-P13 = QA-P28 = N_A

QA-P14 Centroid of the Morley-Triangle

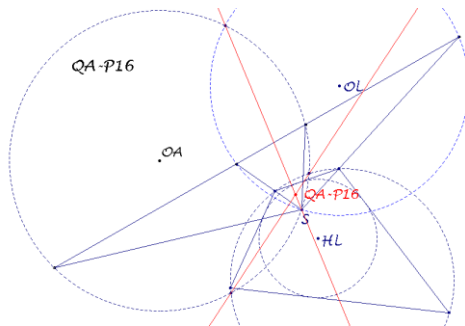
Das Morley Triangle entartet in QA-P2.

QA-P15 Orthocenter of the Morley-Triangle

Das Morley Triangle entartet in QA-P2.

QA-P16 QA-Harmonic Center

Schnitt der Radikalachsen von
QA-DT- und QL-DT-Umkreis
sowie QA-DT-Umkreis und QA-DT-Polarkreis.

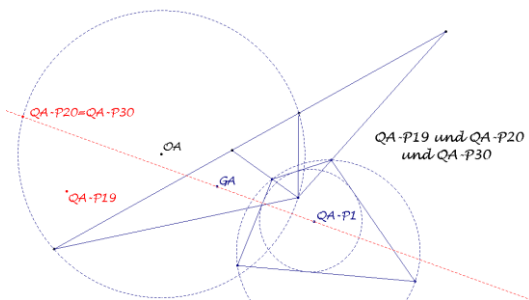


QA-P17 1st Adjunct QA-Centroid

QA-P18 2nd Adjunct QA-Centroid

QA-19 3rd Adjunct QA-Centroid

QA-P19 ist das QA-DT-isotome Bild von QA-P20;
QA-P20 teilt $G_A, QA-P1$ im Verhältnis -2:3.

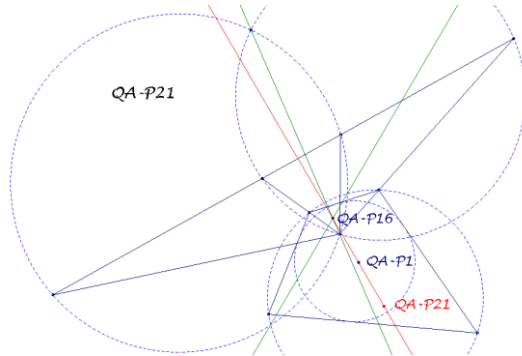


QA-P20 Reflection of QA-P5 in QA-P1

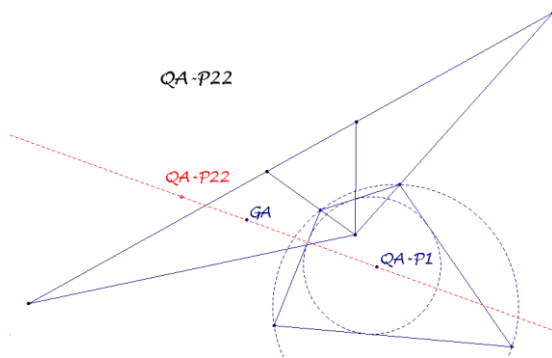
QA-P20 liegt auf dem QA-DT-Umkreis
und teilt $G_A, QA-P1$ im Verhältnis -2:3.

QA-P20 = QA-P30

QA-P21 Reflection of $QA-P16$ in $QA-P1$
 Spiegelung vom Schnitt ($QA-P16$) der Radikalachsen
 von $QA-DT$ - und $QL-DT$ -Umkreis
 sowie $QA-DT$ -Umkreis und $QA-DT$ -Polarkreis an $QA-P1$.

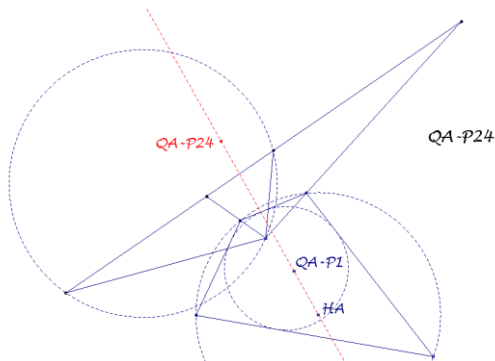


QA-P22 Midpoint $QA-P1$ and $QA-P20$
 $QA-P22$ teilt allgemein $G_A.QA-P1$ im Verhältnis $-1:3$

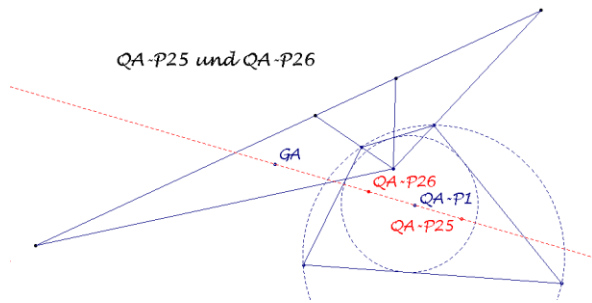


QA-P23 Inscribed Square Axes Crosspoint
 Fernpunkt der Geraden $H_A.QA-P1$.

QA-P24 Anticomplement of $QA-P1$ wrt Morley Triangle
 $QA-P24$ teilt $H_A.QA-P1$ im Verhältnis $-4:3$.



QA-P25 1st QA -Quasi Centroid
 $QA-P25$ teilt allgemein $G_A.QA-P1$ im Verhältnis $-4:1$



QA-P26 2nd QA-Quasi Centroid

QA-P26 teilt allgemein $G_A, QA-P1$ im Verhältnis 2:1

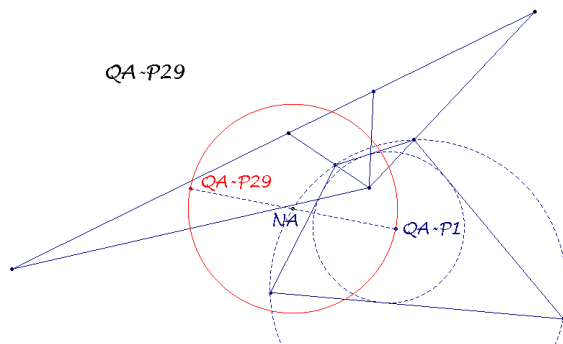
QA-P27 M3D Center

QA-P28 Midpoint of the foci of the QA-Parabolas

$$QA-P28 = QA-P13 = N_A$$

QA-P29 Complement of QA-P2 wrt QA-DT

Spiegelung von $QA-P1$ an N_A (auf $QA-Ci2$).



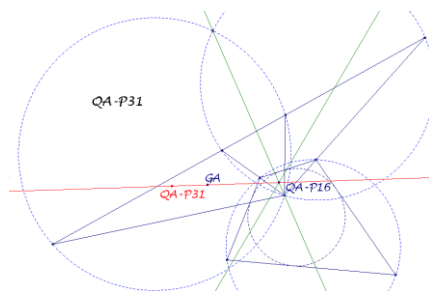
QA-P30 Reflection of QA-P2 in QA-P11

QA-P30 liegt auf dem $QA-DT$ -Umkreis und teilt $G_A, QA-P1$ im Verhältnis -2:3.

$$QA-P30 = QA-P20$$

QA-P31 Complement of QA-P16 wrt QA-DT

QA-P31 ist das $QA-DT$ -Komplement des Schnitts ($QA-P16$) der Radikalachsen von $QA-DT$ - und $QL-DT$ -Umkreis sowie $QA-DT$ -Umkreis und $QA-DT$ -Polarkreis.

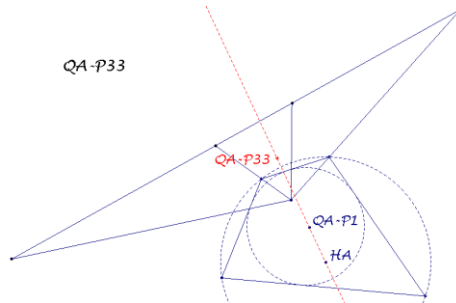


QA-P32 Centroid of the Circumcenter Quadrangle

$QA-P32$ ist der Mittelpunkt H_A des $QA-DT$ -Polarkreises.
 $QA-P3 = QA-P4 = QA-P8 = QA-P12 = QA-P32 = QG-P5$

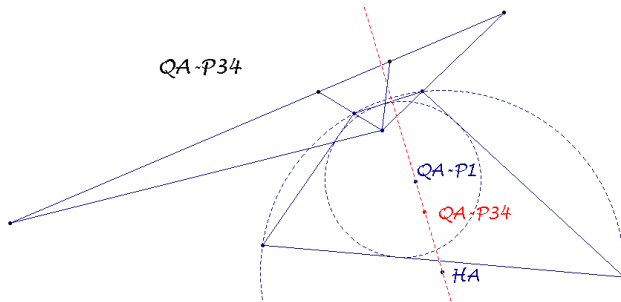
QA-P33 Centroid of the Orthocenter Quadrangle

$QA-P33$ teilt $H_A, QA-P1$ im Verhältnis $-3:2$.



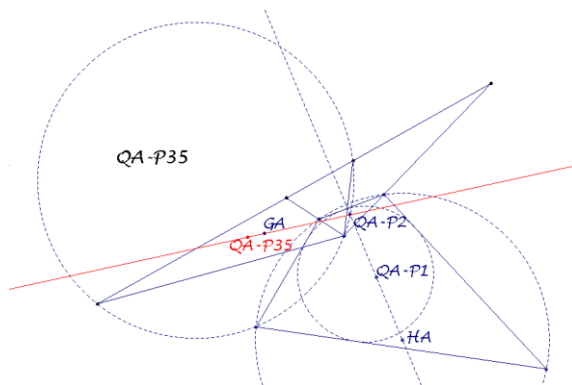
QA-P34 Euler-Poncelet Point of the Centroid Quadrangle

$QA-P34$ teilt $H_A, QA-P1$ im Verhältnis $2:1$.



QA-P35 1st Penta Point

$QA-P35$ teilt allgemein $G_A, QA-P2$ im Verhältnis $-1:6$.



QA-P36 Complement of QA-P30 wrt QA-DT

Zweiter Schnitt von $M_A H_L$
mit dem $QA-DT$ -Neun-Punkte-Kreis $QA-Ci2$.
 $QA-P1 = QA-P6 = QA-P36$

QA-P37 Reflection of QA-P12 in QA-P1

$QA-P37 = QA-P2$ oder Spiegelung von H_A an $QA-P1$
 $QA-P2 = QA-P14 = QA-P15 = QA-P37 = QL-P2 = QG-P10$

Zusammenfallende QA-Punkte

$$\begin{aligned}QA-P1 &= QA-P6 = QA-P36 \\QA-P2 &= QA-P14 = QA-P15 = QA-P37 = QL-P2 = QG-P10 \\QA-P3 &= QA-P4 = QA-P8 = QA-P12 = QA-P32 = QG-P5 = H_A \\QA-P13 &= QA-P28 = N_A \\QA-P20 &= QA-P30\end{aligned}$$

Kollineare Punkte

$$\begin{aligned}QA-L1 &= QA-L2 = QA-L6: \\QA-P1, QA-P2, QA-P3, QA-P4, QA-P6, QA-P7, \\QA-P8, QA-P9, QA-P12, QA-P14, QA-P15, QA-P24, \\QA-P32, QA-P33, QA-P34, QA-P36, QA-P37.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}QA-L3: \\QA-P1, QA-P5, QA-P6, QA-P10, QA-P18, QA-P20, \\QA-P22, QA-P26, QA-P30, QA-P36.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}QA-L4: \\QA-P1, QA-P6, QA-P23, QA-P36.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}QA-L5 \text{ (QA-DT-Euler-Gerade):} \\QA-P3, QA-P4, QA-P8, QA-P10, QA-P11, QA-P12, \\QA-P13, QA-P28, QA-P32.\end{aligned}$$

Konzyklische Punkte

$$\begin{aligned}QA-Ci1 = QA-DT-Umkreis: \\QA-P2, QA-P9, QA-P14, QA-P15, QA-P20, QA-P30, QA-P37.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}QA-Ci2 = QA-DT-Neun-Punkte-Kreis: \\QA-P1, QA-P6, QA-P29, QA-P36\end{aligned}$$

Punkte auf QA-Kegelschnitten

$$\begin{aligned}QA-Co1 = \text{gleichseitige QA-DT-Umhyperbel (Zentrum QA-P1)} \\QA-P2, QA-P3, QA-P4, QA-P8, QA-P12, QA-P14, \\QA-P15, QA-P32, QA-P37.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}QA-Co3 = QA-DT-Polarkreis \text{ (Umkreis des Sehnen-Tangenten-} \\ \text{Vierecks)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}QA-Co4 = \text{gleichseitige QA-DT-Umhyperbel (Zentrum QA-P29)} \\QA-P3, QA-P4, QA-P8, QA-P12, QA-P20, QA-P30, QA-P32.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}QA-Co5 = QA-DT- Umhyperbel: \\QA-P1, QA-P6, QA-P16, QA-P17, QA-P19, QA-P20, \\QA-P30, QA-P36\end{aligned}$$

QA-Anmerkungen

QA-2Co1: Die Achsen der beiden Umparabeln des Sehnen-Tangenten-Vierecks sind die zueinander senkrechten Asymptoten von *QA-Co1*.

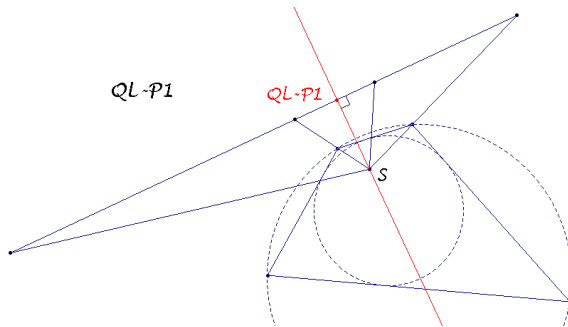
QA-Cu7 entartet zu *QA-Co1*.

QL-Punkte

Es werden die Punkte *QL-P1* bis *QL-P26* berücksichtigt. Keine Angaben werden zu *QL-P14*, *QL-P15*, *QL-P21*, *QL-P22*, *QL-P26* gemacht. Ergänzend sind die Eigenschaften des *EQF*-Katalogs zu beachten.

QL-P1 Miquel Point

Fußpunkt der *QA-DT*- bzw. *QL-DT*-Scheitel-Höhe

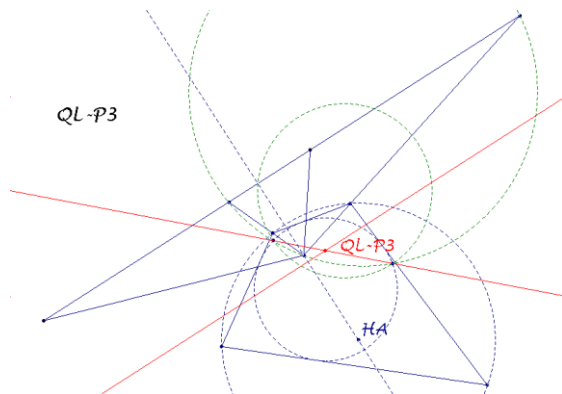


QL-P2 Morley Point

$QL-P2 = QA-P2$ oder Spiegelung von H_A an $QA-P1$
 $QL-P2 = QA-P2 = QA-P14 = QA-P15 = QA-P37 = QG-P10$

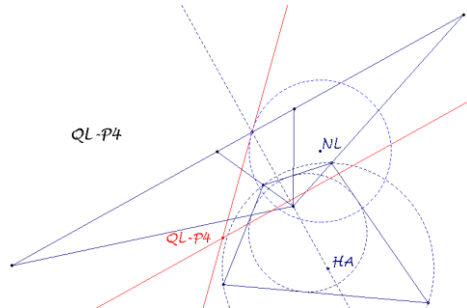
QL-P3 Hervey Point

QL-P3 ist der Schnitt der Radikalachse von *QL-DT*-Umkreis und *QL-DT*-Neun-Punkte-Kreis mit einer Parallelen zur Basisgeraden im halben Abstand zu H_A .



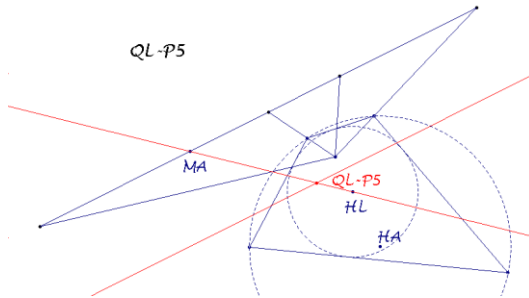
QL-P4 Miquel Circumcenter

$QL-P4$ ist der Schnitt einer Parallelen zur Basisgeraden im halben Abstand zu H_A und einer Tangenten im Höhenfußpunkt ($QL-P1$) an den $QL-DT$ -Neun-Punkte-Kreis.



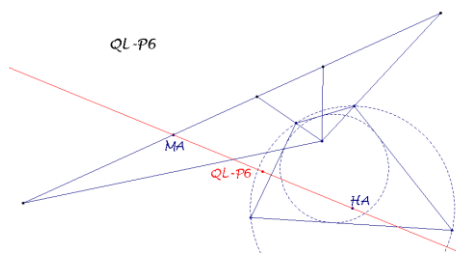
QL-P5 Kantor-Hervey-Point

$QL-P5$ liegt im Schnitt von $H_L M_A$ und einer Parallelen zur Basisgeraden im halben Abstand zu H_A .



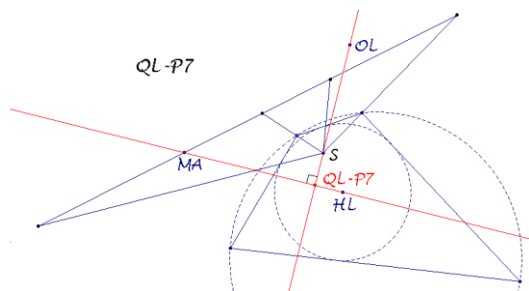
QL-P6 Dimidium Point

$QL-P6$ ist die Mitte von $H_A M_A$.



QL-P7 Newton-Steiner Point

Schnitt der Geraden SO_L und $M_A H_L$.



QL-P8 Centroid of $QL-DT$

$QL-P8 = G_L$

QL-P9 Circumcenter of $QL-DT$

$$QL-P9 = O_L$$

QL-P10 Orthocenter of $QL-DT$

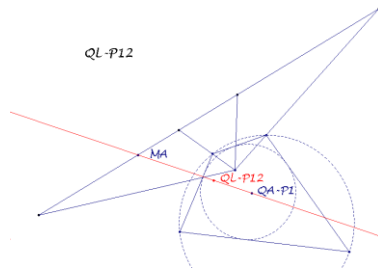
$QL-P10 = H_L$ ist Mittelpunkt des $QL-DT$ -Polarkreises.

QL-P11 Nine-point Center of $QL-DT$

$$QL-P11 = N_L$$

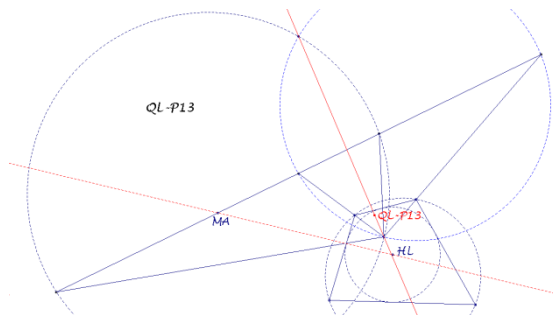
QL-P12 QL -Centroid or Lateral Centroid

$QL-P12$ teilt die Strecke $M_A \cdot QA-P1$ im Verhältnis 2:1.



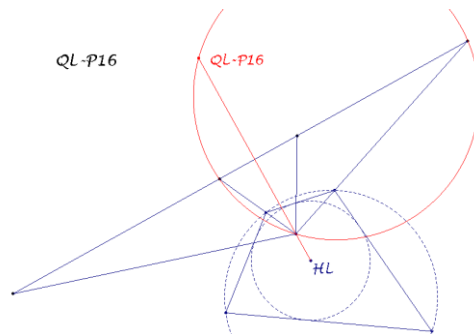
QL-P13 QL -Harmonic Center

$QL-P13$ ist der $QL-DT$ -Tripol der Geraden $H_L M_A$ und liegt auf der Radikalachse der Umkreise von $QA-DT$ - und $QL-DT$.



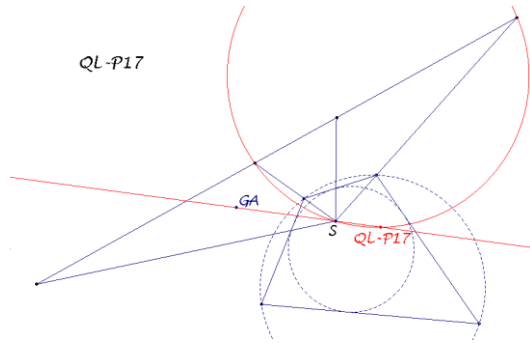
QL-P16 QL -Quasi Circumcenter

$QL-P16$ ist die Spiegelung von H_L an der Basisgeraden.

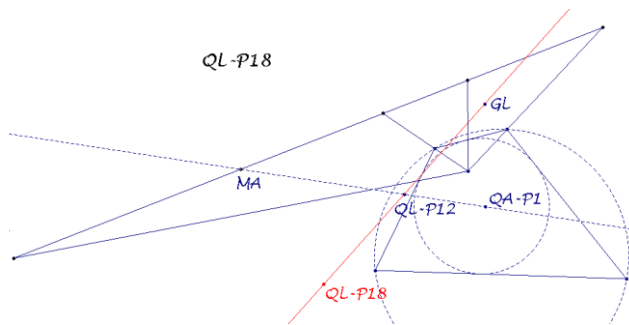


QL-P17 QL -Adjunct Quasi Circumcenter

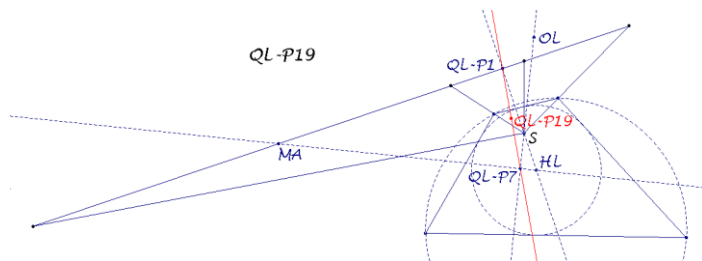
$QL-P17$ ist der zweite Schnitt von SG_A und dem $QL-DT$ -Umkreis.



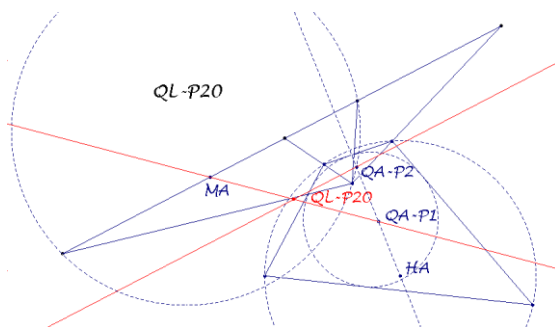
QL-P18 Reflection of $QL-P8$ in $QL-P12$
 $QL-P18$ ist die Spiegelung von G_L am Teilpunkt ($QL-P12$)
 von $M_A \cdot QA-P1$ im Verhältnis 2:1.



QL-P19 Midpoint of $QL-P1$ and $QL-P7$
 $QL-P19$ ist der Mittelpunkt von Höhenfußpunkt ($QL-P1$)
 und Schnitt $SO_L \wedge M_A H_L$ ($QL-P7$).

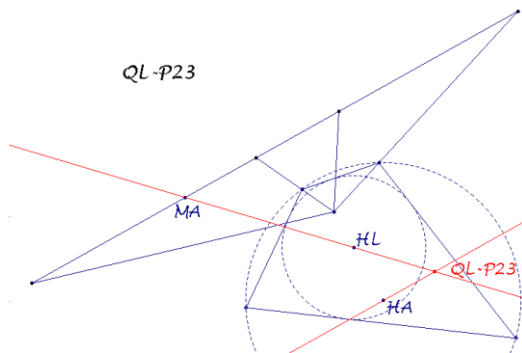


QL-P20 Orthocenter Homothetik Center
 $QL-P20$ ist der Schnitt von $M_A \cdot QA-P1$
 und einer Parallelen zur Basis durch $QA-P2$.



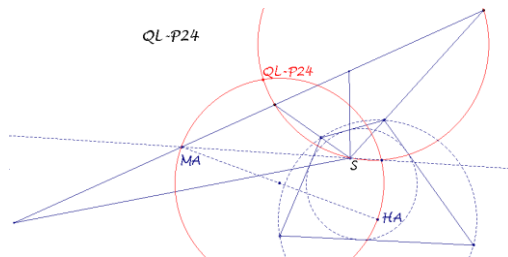
QL-P23 Center of the Inscribed Midline Hyperbola

QL-P23 ist der Schnitt von $H_L M_A$
und einer Parallelen zur Basis durch H_A .



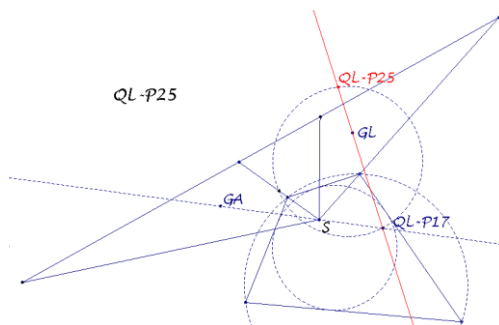
QL-P24 Intersection $QL-P1, QL-P8 \wedge QL-P13, QL-P17$

QL-P24 liegt im Schnitt des QL-DT-Umkreises
und des Thales-Kreises über $H_A M_A$ (zweiter Schnitt auf $S M_A$).



QL-P25 2nd QL-Parabola Focus

QL-P25 teilt die Strecke von G_L
zum zweiten Schnitt von $S G_A$ und dem QL-DT-Neun-Punkte-
Kreis (QL-P17) im Verhältnis -1:3.



QG-Punkte

QG-P1 Diagonal Crosspoint

QG-P1 ist der Scheitel S .

QG-P2 Midpoint 3rd QA-Diagonal

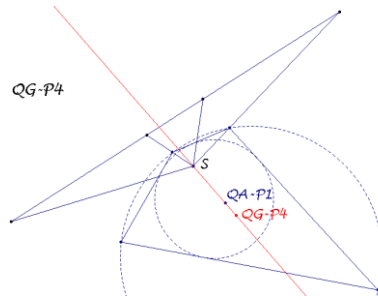
QG-P2 ist die QA-Basismitte M_A .

QG-P3 Midpoint 3rd QL-Diagonal

QG-P3 ist die QL-Basismitte M_L .

QG-P4 1st QG-Quasi Centroid

QG-P4 teilt allgemein die Strecke $S.QA-P1$ im Verhältnis -4:1



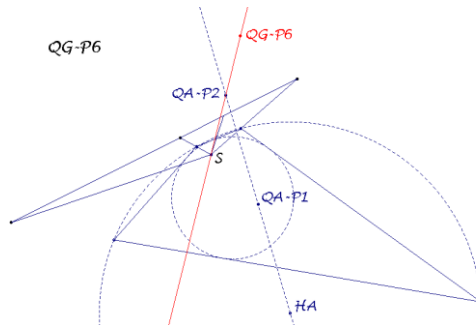
QG-P5 1st QG-Quasi Circumcenter

QG-P5 liegt in H_A .

$$QG-P5 = QA-P3 = QA-P4 = QA-P8 = QA-P12 = QA-P32$$

QG-P6 1st QG-Quasi Orthocenter

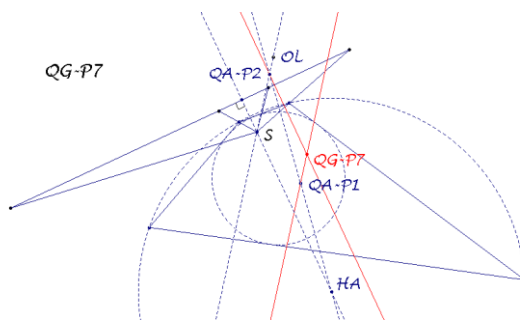
QG-P6 ist die Spiegelung des Scheitels S an $QA-P2$



QG-P7 1st QG-Quasi Nine-point Center

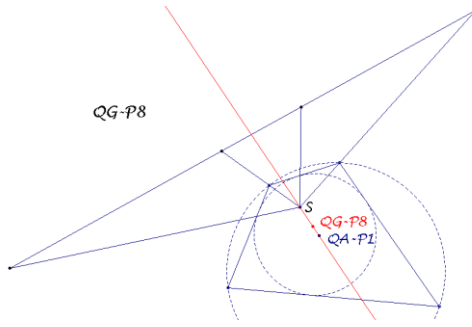
QG-P7 ist der Schnitt

einer Parallelen zu SO_L durch $QA-P1$
und einer Parallelen zur Höhe durch $QA-P2$.

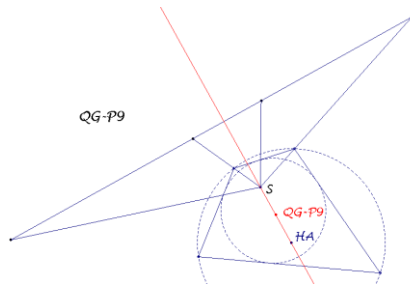


QG-P8 2nd QG-Quasi Centroid

QG-P8 teilt allgemein $S.QA-P1$ im Verhältnis 2:1.

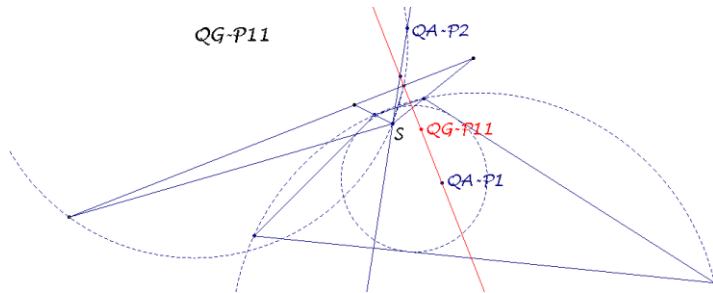


QG-P9 2nd QG-Quasi Circumcenter
 QG-P9 ist die Mitte von S und H_A .

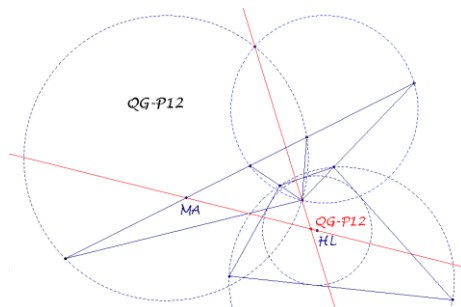


QG-P10 2nd QG-Quasi Orthocenter
 QG-P10 ist zweiter Schnitt von SO_L und QA-DT-Umkreis.
 $QA-P2 = QA-P14 = QA-P15 = QA-P37 = QL-P2 = QG-P10$

QG-P11 2nd QG-Quasi Nine-point Center
 QG-P11 ist die Mitte von QA-P1
 und der Mitte von S, QA-P2.

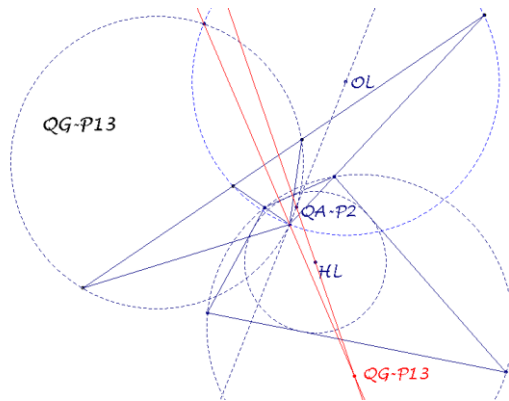


QG-P12 Inscribed Harmonic Conic Center
 QG-P12 liegt im Schnitt von $M_A H_L$ und der Radikalachse der
 Umkreise von QA-DT und QL-DT.



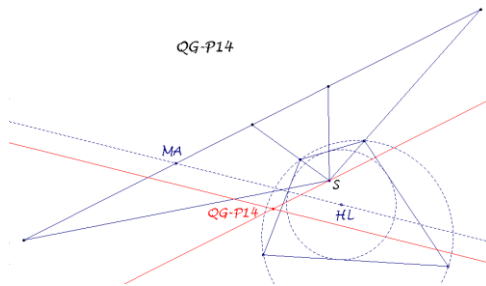
QG-P13 Circumscribed Harmonic Conic Center

$QG-P13$ ist der Schnitt der Radikalachse der Umkreise von $QA-DT$ und $QL-DT$ und der Gerade $H_L, QA-P2$.



QG-P14 Center of the M3D Hyperbola

$QG-P14$ ist der Schnitt einer Parallelen zur Basis durch S und einer Parallelen zu $M_A H_L$ im doppelten Abstand zu S .



Abschließende Anmerkung: Diese Ausarbeitung ist ein Versuch, die Geometrie der EQF -Punkte für Sehnen-Tangenten-Vierecke aus der Sicht des Diagonaldreiecks und des Diagonalendreiecks anzusprechen und einer weiteren Bearbeitung zu empfehlen.

Eckart Schmidt - Holstenstraße 42 - D 24223 Raisdorf
<http://eckartschmidt.de>
eckart_schmidt@t-online.de